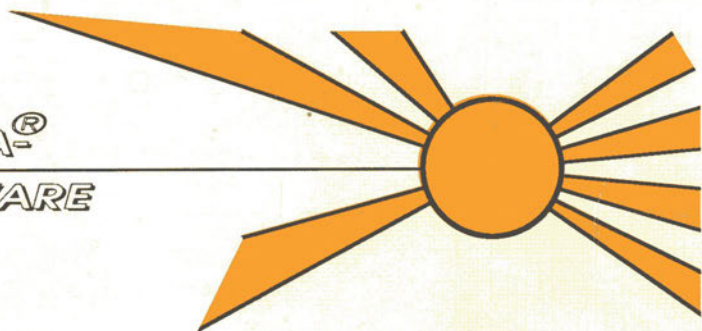


Das flexible
**Kurvendiskussions-
Programm**
für den C 64/128

mit Druckerausgabe



HEUREKA[®]
TEACHWARE



OPTI- MA

**Unterstützt Differential- und Integral-
Rechnung der Oberstufe
an Gymnasium und Fachoberschule**

OPTI-MA - das flexible Kurvendiskussionsprogramm

Von OStR Edgar Kürpig, Ruppichteroth

Jens Kruppe, Lohmar

Guido Bartsch, Lohmar-Birk

mit technischer Unterstützung von Martin Pfost

1. Auflage 1987

2. Auflage 1988

(C) HEUREKA-TEACHWARE & Ostermann Verlag, München, 1988

Alle Rechte vorbehalten. Der Inhalt dieses Titels (Datenträger und Begleitmaterial) ist urheberrechtlich geschützt und darf nur vom Käufer genutzt werden. Jede Weitergabe, Verleih, Vermietung sowie Vervielfältigung bzw. Kopie ist nur mit ausdrücklicher, schriftlicher Genehmigung des Ostermann-Verlags erlaubt. Zuwiderhandlungen werden zivil- und strafrechtlich verfolgt.

ISBN 3-926094-29-X Buch + Diskette

Edgar Kürpig, Guido Bartsch, Jens Kruppe



das flexible
Kurvendiskussionsprogramm

Commodore 64/128

Handbuch

HEUREKA®-TEACHWARE

VORWORT

Ein vollständiges Kurvendiskussionsprogramm mit Nullstellen, Extrema, Ableitungen, Termvereinfachungen, Asymptoten, Polen, Zeichnen mit Zoom-Funktion und Druckerausgabe für einen 64 Kilo-Byte Computer?

OPTI-MA ist das Produkt dreier Autoren, die als Studenten und Lehrer die Mathematik ganz konkret aus der Schulpraxis kennen.

Das Softwarepaket besteht aus insgesamt fünf Programmteilen, die bei Bedarf automatisch geladen werden.

Diese Programmteile sind:

- Hauptprogramm (H)

Das Hauptprogramm dient als Schnittstelle zum Benutzer. Hier werden die zu diskutierenden Funktionen eingegeben, geladen und/oder abgespeichert. Außerdem sind eine komfortable Diskettenverwaltung und eine Grafikverwaltung integriert. Darüber hinaus können im Hauptprogramm die anwenderspezifischen Bildschirmparameter eingestellt werden.

- Kurvendiskussionsprogramm (K)

Im Kurvendiskussionsprogramm wird die eingegebene Funktion durchdiskutiert.

- Zeichenprogramm (Z)

Das Zeichenprogramm zeichnet den (die) Graph(en) der eingegebenen Funktion(en) auf dem Bildschirm. Mit einer sehr komfortablen Zoom-Funktion läßt sich jeder gewünschte Ausschnitt herausvergrößern.

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT	4
WICHTIGE HINWEISE	8
PROGRAMM LADEN	11
DRUCKEREINSTELLUNG DURCH KENNUMMER	12
EIGENE DRUCKERANPASSUNG	15
HAUPTMENUE	19
Funktionseingabe	21
Grafikverwaltung	34
Diskettenverwaltung	37
Bildschirmparameter	37
KURVENDISKUSSION	39
Funktionstypen	39
Sondertasten	41
Ganzrationale Funktionen	42
Gebrochenrationale Funktionen	47
Sonstige Funktionen	57

ZEICHENPROGRAMM	65
Normierung	66
Grund- und Wertemengeeingabe	67
Punkte verbinden, Raster, Ableitungen ..	68
Zeichnen	70
Neuer Bereich	71
FUNKTIONSPLOTTER	75
Anzahl Punkte in x- und y-Richtung	76
INTEGRALRECHNUNG	81
Ausgabemenue im Integralprogramm	83
HINWEIS FÜR LEHRER	85
STICHWORTVERZEICHNIS	86

WICHTIGE HINWEISE

- Das Programm ist so aufgebaut, daß man an jeder Stelle mit <←> in den vorherigen Menüpunkt gelangt.

<RETURN> - beendet eine Eingabe oder führt in das nächste Menue.

<↑> - wird vom Programm als '^' geschrieben, in Übereinstimmung mit der gebräuchlichen mathematischen Schreibweise.

- In der Funktionseingabe brauchen überflüssige Malpunkte nicht eingegeben zu werden. Falls sie eingegeben wurden, werden sie automatisch entfernt.

- Funktionen wie $\sin x$ $\cos x$ etc. müssen das Argument in Klammern enthalten, in diesem Fall also: $\sin(x)$ $\cos(x)$ etc. .

- Schreibweisen wie $\sin^2(x)$ sind nicht zulässig, sondern als $\sin(x)^2$ einzugeben.

- Der logarithmus naturalis $\ln x$ muß auf dem Commodore als $\log(x)$ eingegeben werden.

Abgeleitete mathematische Funktionen

Sekans	$\text{SEC}(x) = 1/\text{COS}(x)$
Cosekans	$\text{CSC}(x) = 1/\text{SIN}(x)$
Cotangens	$\text{COT}(x) = 1/\text{TAN}(x)$
Arcussinus	$\text{ARSIN}(x) = \text{ATN}(x/\text{SQR}(1-x^2))$
Arcuscosinus	$\text{ARCOS}(x) = -\text{ATN}(x/\text{SQR}(1-x^2))$ $+ \pi/2$
Arcuscotangens	$\text{ARCOT}(x) = \text{ATN}(x) + \pi/2$
Arcussekans	$\text{ARSEC}(x) = \text{ATN}(x/\text{SQR}(x^2-1))$
Arcuscosekans	$\text{ARCSC}(x) = \text{ATN}(x/\text{SQR}(x^2-1))$ $+ (\text{SGN}(x)-1)\pi/2$
Sinus hyperbolicus	$\text{SINH}(x) = (\text{EXP}(x) - \text{EXP}(-x))/2$
Cosinus hyperbolicus	$\text{COSH}(x) = (\text{EXP}(x) + \text{EXP}(-x))/2$
Tangens hyperbolicus	$\text{TANH}(x) = (\text{EXP}(x) - \text{EXP}(-x))$ $/(\text{EXP}(x) + \text{EXP}(-x))$
Arcussinus hyperbolicus	$\text{ARSINH}(x) = \text{LOG}(x + \text{SQR}(x^2+1))$
Arcuscosinus hyperbolicus	$\text{ARCOSH}(x) = \text{LOG}(x + \text{SQR}(x^2-1))$
Arcustangens hyperbolicus	$\text{ARTANH}(x) = (\text{LOG}((1+x)/(1-x)))/2$

PROGRAMM LADEN

Um das Programm von Diskette zu laden und zu starten, ist folgendermaßen vorzugehen:

- 1.) Computer, Diskettenlaufwerk, Monitor und Drucker (evtl.) einschalten
- 2.) Druckerkennummer ermitteln (siehe nächste Seite).
- 3.) OPTI-MA V1.0 Diskette in das Laufwerk einlegen und eintippen:

LOAD"*",8,'Kennummer'

Für 'Kennummer' setzt man die in 2.) ermittelte Zahl ein.

- 4.) Das Programm wird durch den HEUREKA-Sprint extrem schnell geladen und startet danach automatisch.

DRUCKEREINSTELLUNG DURCH KENNUMMER

Um die Druckerkennummer zu ermitteln, bedient man sich der nebenstehenden Tabellen.

Beispiel: Besitzt man einen EPSON FX-80 Drucker mit Wiesemann-Interface, so wäre die Kennummer 41.

Die erste Ziffer (hier 4) bedeutet, daß Drucker Nummer 4 gewählt wurde. Die zweite Ziffer (hier 1) wählt ein Interface aus.

Sollte der Drucker nach der Auswahl der Nummer alles in einer Zeile drucken, so muß zu der Kennummer noch 128 addiert werden (aus 41 würde 169).

Die meisten Drucker lassen sich so sehr einfach an das Programm anpassen, und man sollte, wenn der Drucker nicht richtig angesprochen wird, andere Kombinationen ausprobieren. Falls jedoch keine Kennummer zufriedenstellende Resultate liefert, so besteht die Möglichkeit, eine individuelle Druckeranpassung vorzunehmen (siehe EIGENE DRUCKERANPASSUNG).

1. Ziffer (Drucker):

- 1 MPS 801/803 & Kompatible
- 2 ---
- 3 EPSON RX-80
- 4 EPSON FX-80
- 5 STAR SG-10
- 6 SHINWA CP-80
- 7 ---
- 8 ---
- 9 ---

2.Ziffer (Interface):

- 1 Wiesemann, Data Becker
- 2 ---
- 3 ---
- 4 Merlin c+, Görlitz
- 5 ---
- 6 ---
- 7 ---
- 8 ---
- 9 User-Port-Parallelkabel

Hinweise:

- Beim MPS 801/803 und Kompatiblen ist die Kennnummer gleich 1 und damit nur einstellig. Geladen wird also mit LOAD"*,8,1.
- Um ein mit der Druckeranpassung erstelltes File zu laden, gibt man als Kennnummer 8 ein. Der Ladebefehl lautet damit LOAD"*,8,8.
- Viele Drucker sind kompatibel zu FX-80 (z.B. PANASONIC KX-1080).
- Drucker, die den MPS 801/803 simulieren können, sollten über Parallelkabel angesprochen werden, um somit ein Verzerren der Grafik zu verhindern.
- Der STAR NL-10 ist je nach Ausführung entweder zum FX-80 oder zum MPS 801/803 kompatibel.
- Für den nicht-grafikfähigen MPS 802 ist aus Platzgründen keine eigene Anpassung vorgesehen.

EIGENE DRUCKERANPASSUNG

Wenn Ihr Drucker nicht mit den vorher beschriebenen Anpassungen läuft, so besteht die Möglichkeit sich ein spezielles Drucker-File zu generieren. Das dazu notwendige Programm befindet sich auf der Rückseite der OPTI-MA V1.0 Diskette.

Man lädt das Programm mit LOAD"INSTALL",8 und startet es anschließend mit RUN.

Es empfiehlt sich vor dem Experimentieren mit diesem Programm, eine Kopie von der Diskettenrückseite zu machen.

Nach Einladen und Starten des Programms wird als erstes gefragt, ob der Drucker am Userport betrieben wird. Wenn nicht, wird nach der Geräteadresse des Druckers gefragt. Man kann hier nur 4 oder 5 eingeben, da andere Geräteadressen für andere Geräte reserviert sind.

Anschließend wird nach der Sekundäradresse gefragt, die das Interface hat, um dieses auf Linearkanal umzuschalten.

Sobald dieses eingegeben ist, werden Sie aufgefordert die Byte-Anzahl für eine Befehlssequenz einzugeben, die vor dem Ausdruck gesendet wird und den Drucker initialisiert, auf Grafik umschaltet usw. Anschließend werden nacheinander die Bytes eingegeben, die ...

1.) ...den Zeilenabstand so einstellen, daß bei Grafikdruck (z.B. im Funktionsplotter) die Zeilen kontinuierlich aneinanderhängen. Sollten beim Drucken feine Striche zwischen den Zeilen erscheinen oder sich die Zeilen überlappen, so ist der Fehler hier zu suchen.

2.) ...die Grafik einschalten. Die Auflösung sollte zwischen 480 und 960 Punkte pro Zeile liegen (bei DIN A4 Druckern), da es sonst zu starken Verzerrungen kommen kann. ACHTUNG: Die Anzahl der zu übermittelnden Grafikbytes darf auf keinen Fall eingegeben werden, da dies je nach Größe des Ausdrucks vom Programm automatisch gemacht wird.

Wenn alle Bytes eingegeben sind, wird nach der Anzahl der Bytes gefragt, die nach dem Drucken an den Drucker gesendet werden sollen (z.B. Line-feed).

Da diese Option nicht bei allen Druckern benötigt wird, kann hier im Gegensatz zur vorher eingegeben Bytefolge auch '0' eingegeben werden.

Nach Eingabe der Anzahl, gibt man die Bytes ein.

Danach wird schließlich noch gefragt, wieviel Punkte pro Zeile mit dieser Einstellung gedruckt werden können. Diese Angabe wird zum Formatieren der Ausdrücke benötigt.

Zum Schluß wird gefragt, ob die Eingaben korrekt sind. Drückt man 'N' für Nein, so wird das Programm neu gestartet, wobei jedoch die vorher eingegebenen Daten noch vorhanden sind, die jetzt berichtigt werden können. Ist alles korrekt, so drückt man 'J' für Ja. Anschließend wird ein neues Druckerfile auf die im Diskettenlaufwerk befindliche Diskette geschrieben, wobei alte Druckerfiles gelöscht werden.

Zum Schluß macht das Programm einen Reset, und das Programm OPTI-MA kann mit LOAD"*,8,8 eingeladen werden. Kurz nach dem Ladevorgang wird man aufgefordert die Diskette mit dem Druckerfile einzulegen.

Abschließend sei noch folgendes erwähnt:

1.) Die Druckroutinen arbeiten so, daß alle Daten im Grafik-Modus des Druckers ausgegeben werden, so daß auch die OPTI-MA Sonderzeichen ausgedruckt werden

2.) Jede Zeile stellt einen eigenen Druckvorgang dar, der nach folgendem Schema abläuft:

- Senden der ersten Bytefolge
- Daten drucken
- Senden der zweiten Bytefolge

HAUPTMENUE

Nach dem Laden von OPTI-MA gelangt man als erstes in das Hauptprogramm.

Es erscheint das Hauptmenue (H0.00).

Man gelangt hier durch Drücken der Tasten <1> bis <4> zu den angegebenen Unterprogrammen.

Durch die Taste <0> wird das Programm beendet und der Rechner in den Einschaltzustand zurückversetzt.

Um eine Kurvendiskussion durchzuführen, ist hier grundsätzlich <1> zu drücken, durch Betätigen von <RETURN> wird dies vom Rechner automatisch ausgeführt.

Die Punkte '2' bis '4' sollen der Übersicht halber hier zunächst offen bleiben, werden aber etwas weiter hinten in der Anleitung (unter den Kapiteln Grafikverwaltung, Diskettenverwaltung und Bildschirmparameter) genau erläutert.

OPTI - MA V 1.0 H0.00

Hauptmenue

- [1]..... Funktion eingeben
- [2]..... Grafikverwaltung
- [3]..... Diskettenverwaltung
- [4]..... Bildschirmparameter

- [0]..... Programm beenden

OPTI - MA V 1.0 H1.00

Funktion eingeben

- [A]..... ganzrationale Funktion
 - [B]..... gebrochenrationale Funktion
 - [C]..... sonstige Funktion

 - [D]..... Funktion von Disk laden
-

Funktion eingeben (H1.00)

In der Mathematik werden alle Funktionen in die folgenden drei Typen unterteilt:

1. die ganzrationalen Funktionen
2. die gebrochenrationalen Funktionen
3. die sonstigen Funktionen

Ganzrationale Funktionen

Ganzrational sind Funktionen, die als Summe von ganzzahligen positiven Potenzen von x mit entsprechenden Koeffizienten oder durch Produkte dieser eingegeben werden.

Einige Beispiele ganzrationaler Funktionen:

$$f(x) = x^5 - x^3 + 1/4x^2$$

oder

$$f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x+1)$$

Um Funktionen solcher Gestalt einzugeben, wählt man 'A'.

Gebrochenrationale Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen sind Funktionen, die sich als Quotient zweier ganzrationaler Funktionen darstellen lassen.

Zum Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

oder

$$f(x) = \frac{x^3}{3(x-2)^2}$$

Sollen gebrochenrationale Funktionen eingegeben werden, so drückt man .

Sonstige Funktionen

Sonstige Funktionen lassen sich nicht mehr ausschließlich durch die Summe positiver Potenzen von x darstellen, da sie Terme nicht-rationaler, transzendenter Form enthalten.

Beispiele für sonstige Funktionen:

$$f(x) = \cos(x) + 3\sin(x^2)^2$$

oder

$$f(x) = \sin(x)^{x^2}$$

OPTIMA akzeptiert als 'sonstige Funktionen' alle auf dem Commodore darstellbaren Funktionen (natürlich ohne die rechnerspezifischen wie $\text{USR}(x)$ etc.).

An dieser Stelle möchten wir darauf hinweisen, daß der Logarithmus naturalis (natürlicher Logarithmus) ' $\ln x$ ', auf dem Commodore als ' $\log(x)$ ' eingegeben werden muß.

Funktionen, die nicht im Commodore Basic enthalten sind, z.B. $\sinh(x)$, sind durch andere Funktionsausdrücke zu ersetzen (siehe ABGELEITETE MATHEMATISCHE FUNKTIONEN).

Ganzrationale Funktion eingeben (H1.10)

Hier wird die Eingabe einer ganzrationalen Funktion erwartet.

Eine Besonderheit bei dieser Eingabe ist die komfortable und übersichtliche Eingabe von Exponenten.

Beispiel:

$$f(x) = x^5 - x^3 + 1/4x^2$$

Folgende Tastenfolge ist dafür einzugeben:

$$x\uparrow 5 - x\uparrow 3 + 1/4x\uparrow 2$$

Sobald die <↑>-Taste gedrückt wird erscheint das Exponentensymbol '^' und der Cursor blinkt über diesem. Sie befinden sich dann in der Exponenteneingabe, bei der Sie einfach die entsprechenden Zahlen eingeben.

Dieser Modus wird durch das Drücken einer Alpha-Taste (das sind <+>, <->, ... und alle Buchstaben) beendet, in oben genanntem Beispiel also die <-> Taste.

Ist die Funktion eingegeben und mit <RETURN> abgeschlossen, so wird sie auf syntaktische Korrektheit hin überprüft. Tauchen Fehler auf, so wird der jeweils erste davon invers angezeigt und kann beseitigt werden.

Ist die Eingabe korrekt, so kann die Funktion zur späteren Verwendung (Aufgabensammlung) auf Diskette abgespeichert werden.

Soll die Funktion abgespeichert werden, entfernen Sie die OPTI-MA - Systemdiskette, legen eine formatierte Diskette ein und drücken auf die Frage: 'Funktion abspeichern' die <J>-Taste.

Durch Drücken von <N> oder <RETURN> wird die Abspeicherung übersprungen.

Bitte legen Sie nach dem Abspeichern wieder die OPTI-MA Systemdiskette ein.

O P T I - M A V 1.0 H1.10

ganzrationale Funktion eingeben

$$f(x) = x^2$$

Funktion abspeichern ? Ja/Nein

O P T I - M A V 1.0 H1.20

gebrochenrationale Funktion eingeben

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2}$$

Gebrochenrationale Funktion eingeben (H1.20)

Eine gebrochenrationale Funktion besteht aus zwei ganzrationalen Funktionen: der Zähler- und der Nennerfunktion.

Bei der Eingabe steht der Cursor zunächst im Zähler. Also wird zuerst die Zählerfunktion eingegeben, und zwar vollkommen analog zur Eingabe ganzrationaler Funktionen.

Nach <RETURN> springt der Cursor in den Nenner.

Jetzt wird die Nennerfunktion wie die Zählerfunktion eingegeben.

Wieder wird <RETURN> gedrückt.

Syntax-Fehler werden erst nach vollständiger Eingabe der Zähler- und Nennerfunktion angezeigt.

Sonstige Funktion eingeben (H1.30)

Bei der Eingabe sonstiger Funktionen sind auch nicht-rationale, transzendente Funktionen erlaubt.

Die 'sonstige' Funktion kann auch nicht ganzzahlige und negative Exponenten haben, selbst Terme in x sind als Exponenten erlaubt.

Beispiel:

$$f(x) = \cos(x) + 3\sin(x^2)^2$$

oder

$$f(x) = \sin(x)^{x^2}$$

Bei der Eingabe von Exponenten muß folgendes beachtet werden:

Ganzzahlige positive Exponenten werden wie bei den ganz- und gebrochenrationalen Funktionen eingegeben.

Alle anderen Exponenten werden in der üblichen '^'-Schreibweise eingegeben.

Das '^'-Zeichen wird durch zweimaliges Drücken der <↑>-Taste erreicht.

Beispiel:

$$f(x) = \sin(x)^{x^2}$$

Folgende Tastenfolge ist einzugeben:

`sin(x)↑↑x↑2`

Beim zweimaligen Drücken von <↑> bleibt ein '^'-Zeichen stehen und der Cursor wandert um eine Position nach rechts.

`O P T I - M A V 1.0 H1.30`

sonstige Funktion eingeben

`f(x)= sin(x)`

Funktionsscharen eingeben (H1.30)

OPTI-MA bietet als besonderen Leckerbissen das Zeichnen und Ausplotten von Schaubildern von Funktionsscharen.

Funktionsscharen fallen grundsätzlich unter den Funktionstyp 'Sonstige Funktionen'. Die Scharenfunktion $f(x,k)$ wird als Funktion in x mit Scharparameter ' k ' eingegeben.

Beispiel:

$$f(x) = \sin(kx)$$

Sofort nach Drücken von <RETURN> gelangt man in das Menue 'Scharenparameter eingeben' (H1.32)

Eingegeben werden hier die Scharenparameter k_i ($i=1,2,\dots,8$).

O P T I - M A V 1.0 H1.30

sonstige Funktion eingeben

$$f(x) = \sin(kx)$$

O P T I - M A V 1.0 H1.32

Scharparameter eingeben

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\pi \\ k_2 &= \sin(2) \\ k_3 &= \end{aligned}$$

Funktion abspeichern ?

Ja/Nein

Die Eingabe wird mit zweimal <RETURN> beendet. Die eingegebenen Parameter werden später beim Zeichnen und Ausplotten nacheinander in die Scharenfunktion eingesetzt.

Auf der vorherigen Seite sehen Sie ein Beispiel mit der oben angegebenen Funktion $f(x) = \sin(kx)$.

Die daraus resultierenden Scharfunktionen sind:

$$f(x, k_1) = \sin(2\pi x)$$

$$\text{mit } k_1 = 2\pi$$

und

$$f(x, k_2) = \sin(\text{sqr}(2)x)$$

$$\text{mit } k_2 = \text{sqr}(2)$$

Funktionsüberlagerung (H1.30)

Ein weiterer Leckerbissen von OPTI-MA ist die Funktionsüberlagerung.

Bis zu neun unabhängige Funktionen (im Gegensatz zu den Scharenfunktionen) können in der Bildschirm- und Plottergrafik überlagert werden.

Überlagerbar sind, wie bei den Scharen, grundsätzlich nur 'Sonstige Funktionen'.

Die erste Funktion wird ganz normal unter 'sonstige Funktion eingeben' eingegeben.

Die Eingabe wird jedoch nicht mit <RETURN>, sondern mit <SHIFT-RETURN> beendet.

Dann wird die nächste Funktion analog zur ersten eingegeben und gegebenenfalls <SHIFT-RETURN> gedrückt.

Bei der letzten Funktion drücken Sie <RETURN> anstelle <SHIFT-RETURN>.

Hinweis: Eine Funktion mit dem Scharparameter k ist nicht überlagerbar!

Grafikverwaltung (H2.00)

In der Grafikverwaltung kann der aktuelle Grafikbildschirm angezeigt werden. Dieser kann, wenn gewünscht, beschriftet werden.

Bei der Beschriftung ist folgende Belegung der Funktionstasten zu beachten:

Wird <F5> gedrückt, so werden sämtliche Ziffern in Indizes-Schreibweise dargestellt.

Nach dem Drücken von <F3> werden sämtliche Ziffern in Exponentenschreibweise ausgegeben.

<F1> neutralisiert den Exponenten- und Indizes-Modus und schaltet wieder auf normale Ziffernausgabe um.

Mit <RETURN> wird die Beschriftung verlassen.

Hinweis: Ein einmal gelöscht oder überschriebener Grafikbereich kann nicht mehr rekonstruiert werden.

O P T I - M A V 1.0 H2.00

Grafikverwaltung

- [A]..... Grafik anschauen
- [B]..... Grafik beschriften
- [C]..... Grafik speichern
- [D]..... Grafik laden
- [E]..... Grafik drucken

O P T I - M A V 1.0 H2.40

Grafik drucken

- [A]..... '1' und '2' drucken
 - [B]..... Nur '1' drucken
-

Die erstellte Grafik kann auch, zur späteren Verwendung, auf Diskette abgespeichert (und natürlich wiedereingeladen) werden.

Der Filename des Grafikfiles wird vom Programm um ein inverses Zeichen ergänzt, was jedoch bei der Bedienung von OPTI-MA nicht beachtet werden muß.

Die wohl wichtigste Grafik-Option ist 'Grafik drucken' (H2.40).

Die Grafik wird in zwei Teile, '1' und '2', unterteilt:

'1' den großen linken Teil ohne Grafikkoordinaten etc.

'2' den rechten Teil (kleine Grafik und Grafikkoordinaten der großen Grafik).

Beim Ausdruck kann man Teil '1' alleine, oder aber zusammen mit '2' ausdrucken, wobei im letzteren Fall, der Übersicht halber Teil '2' um einige Punktzeilen von '1' entfernt gedruckt wird.

Diskettenverwaltung (H3.00)

Die Optionen in der Diskettenverwaltung sind selbsterklärend.

Die Befehle können jedoch alle anhand des Commodore C64/C128 Handbuchs und des Floppy-Manuals nachvollzogen werden.

Bildschirmparameter (H4.00)

Die Voreinstellung von OPTI-MA wurde auf fast allen erdenklichen Monitoren und Fernsehern getestet.

Sollte dennoch Ihr Fernseher/Monitor ein nicht optimales Bild haben, dann haben Sie die Möglichkeit die Farbkombination zu wechseln und die Zeichendicke zu verändern (letzteres mittels Zeichensatz wechseln).

KURVENDISKUSSION

Wie im Eingabemenue für Funktionen zu erkennen ist, gibt es hier 3 Funktionsarten, die auf verschiedene Arten bearbeitet werden:

- 1.) ganzrationale Funktionen
- 2.) gebrochenrationale Funktionen
- 3.) sonstige Funktionen.

Zur Eingabe der Funktionstypen:

1.) Ganzrationale Funktionen werden eingegeben

- Als Summe von Potenzen von x mit entsprechenden Koeffizienten (Vorzahlen) oder

z.B. $1/2 \cdot x^{11} - 13.456x^3 + 22.17$

- als Produkte. (z.B. als Produkte von Linearfaktoren).

z.B. $(x-4)(x+3.13) \cdot (x-1/9)$

Der höchste Exponent der Funktion darf 20 nicht übersteigen.

Andere Eingaben (z.B. Summen von Klammern etc.) führen bei dieser Eingabeart zu Fehlern.

Wegen der Rechenungenauigkeiten des C64 ist zu beachten, daß

- Funktionen mit sehr kleinen Koeffizienten (z.B. kleiner als $1/1000$) mit Potenzen von 10 multipliziert werden sollten,

- Funktionen mit großen Koeffizienten (z.B. größer als 1000) durch Potenzen von 10 dividiert werden sollten.

2.) Für gebrochen rationale Funktionen wird ein Bruchstrich angeboten, so daß Zähler und Nenner getrennt eingegeben werden müssen.

Der maximale Grad der Funktionen ist hierbei 5, sowohl im Zähler als auch im Nenner.

3.) Sonstige Funktionen (z.B. \sin , \exp etc., aber auch ganz- bzw. gebrochenrationale) können beliebig eingegeben werden.

Der Vorteil der Funktionseingaben bei 1.) und 2.) liegt darin, daß

- Funktionsterme vereinfacht werden (ausmultipliziert, gekürzt)
- Definitionslücken - Pole bestimmt
- Asymptoten berechnet
- Ableitungen übersichtlich dargestellt werden.

Sondertasten:

Die Taste <+>

Wird diese Taste beim Programmablauf gedrückt, so wird die laufende Bearbeitung abgebrochen und das Programm springt ins Ausgabemenue.

Beim Drücken der Taste während der Menueausgaben springt das Programm in die entsprechenden anderen Menues.

Die Taste <SHIFT-LOCK>

Wird diese Taste beim Laden des Kurvendiskussionsprogramms gedrückt, so kann man in allen Kurvendiskussionsprogrammen die Rundungen (0 bis 5 Dezimale) verändern.

Wird die Taste im laufenden Programm gedrückt gelassen, so wird an jeder wichtigen Stelle das Programm unterbrochen, so daß während des Ablaufs die Werte in Ruhe betrachtet werden können. Durch das Drücken einer beliebigen Taste fährt das Programm fort bis zur nächsten wichtigen Bildschirmausgabe.

Ganzrationale Funktionen

Es werden folgende Operationen durchgeführt:

1.) Ausmultiplikation von Produkten, Umwandeln von Brüchen in Dezimalzahlen.

2.) Ableitung (Bilden der ersten drei Ableitungen)

3.) Berechnung der Nullstellen

4.) Berechnung der Extremwerte und Ausgabe der Art der Extremwerte. (Maximum - Minimum werden mit H (Hochpunkt) bzw. T (Tiefpunkt) vor der Angabe dargestellt). Außerdem werden Funktionswerte und Werte der zweiten Ableitung angegeben.

5.) Berechnung der Wendepunkte und Ausgabe der Art der Wendepunkte. (Rechts - links - Wendepunkt bzw. Links - rechts - Wendepunkt). Außerdem werden Funktionswerte und Werte der ersten Ableitung angegeben.

6.) Sattelpunkte werden sowohl bei 4.) als auch bei 5.) angegeben, ebenso werden Stellen, an denen 1. und 2. Ableitung Null sind, entsprechend angegeben.

Anschließend springt das Programm ins Ausgabemenü, auch wenn nur Teile der oben aufgeführten Punkte bestimmt wurden.

Funktion und Ableitungen:

$$f(x) = x^5 - x^3 + 1/4 x^2$$

$$= x^5 - x^3 + .25x^2$$

$$f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + .5x$$

$$f''(x) = 20x^3 - 6x + .5$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 6$$

Nullstellen:

$$N_1(-1.11 / 0)$$

$$f'(-1.11) = 3.28$$

$$N_2(0 / 0)$$

$$f'(0) = 0$$

$$N_3(.27 / 0)$$

$$f'(.27) = -.06$$

$$N_4(.84 / 0)$$

$$f'(.84) = .77$$

Extremstellen:

$$E_1(-.85 / .35)$$

$$\text{Max} \quad f''(-.85) = -6.58$$

$$E_2(0 / 0)$$

$$\text{Min} \quad f''(0) = .5$$

$$E_3(.18 / 0)$$

$$\text{Max} \quad f''(.18) = -.45$$

$$E_4(.67 / -.05)$$

$$\text{Min} \quad f''(.67) = 2.53$$

Wendepunkte:

$$W_1(-.59 / .22)$$

$$r-l-Wp \quad f'(-.59) = -.73$$

$$W_2(.09 / 0)$$

$$l-r-Wp \quad f'(.09) = .02$$

$$W_3(.5 / -.03)$$

$$r-l-Wp \quad f'(.5) = -.19$$

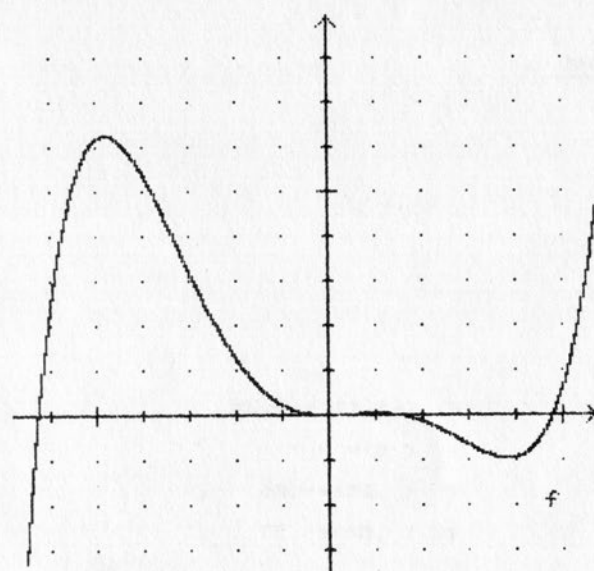
Tangente:

$$\text{Tangente an } P(.54 / -.04):$$

$$t(x) = -.18x + .06$$

$$\text{Normale:}$$

$$n(x) = 5.56x - 3.04$$



$$x-E = .176$$

$$x_1 = -1.056$$

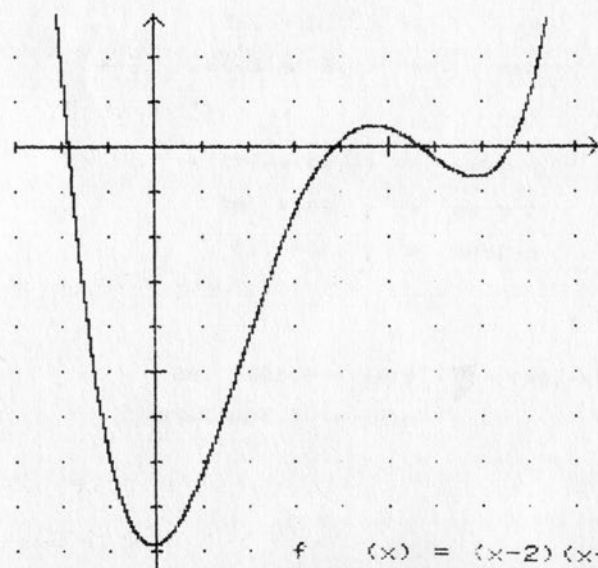
$$x_2 = .88$$

$$y-E = .056$$

$$y_1 = -.168$$

$$y_2 = .448$$

$$f(x) = x^5 - x^3 + 1/4 x^2$$



$$x-E = .528$$

$$x_1 = -1.584$$

$$x_2 = 4.752$$

$$y-E = 2.72$$

$$y_1 = -24.48$$

$$y_2 = 5.44$$

$$f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x+1)$$

Funktion und Ableitungen:

$$f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x+1)$$

$$= x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24$$

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 34x + 2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 34$$

$$f'''(x) = 24x - 48$$

Nullstellen:

$$N_1(-1/0)$$

$$f'(-1) = -60$$

$$N_2(2/0)$$

$$f'(2) = 6$$

$$N_3(3/0)$$

$$f'(3) = -4$$

$$N_4(4/0)$$

$$f'(4) = 10$$

Extremstellen:

$$E_1(-.06/-24.06)$$

Min

$$f''(-.06) = 36.75$$

$$E_2(2.46/1.32)$$

Max

$$f''(2.46) = -11.51$$

$$E_3(3.6/-1.77)$$

Min

$$f''(3.6) = 16.76$$

Wendepunkte:

$$W_1(.92/-13.29)$$

l-r-Wp

$$f'(.92) = 16.08$$

$$W_2(3.08/-.32)$$

r-l-Wp

$$f'(3.08) = -4.08$$

Tangente:

$$\text{Tangente an } P(.5/-19.69):$$

$$t(x) = 13.5x - 26.44$$

$$\text{Normale:}$$

$$n(x) = -.07x - 19.65$$

Ausgabemenues:

1-Druckerausgabe. Beim Drücken der Taste <1> wechselt die Anzeige von NEIN auf JA und vice versa, so daß alle Angaben auch auf den Drucker ausgegeben werden können. Hierbei wird auch kontrolliert, ob der Drucker angeschaltet ist.

F-Funktion und Ableitungen

N-Nullstellen

E-Extremwerte

W-Wendepunkte

Die obigen 4 Punkte sprechen für sich.

B-Werte

beim Drücken der Taste erscheint eine Eingabe, bei der der x-Wert angegeben werden kann. Hierbei werden auch Eingaben der Art $1/3$, $\sin(34)$ oder $\exp(5)$ akzeptiert, allerdings müssen hier Malpunkte angegeben werden. Nach Drücken von <RETURN> werden alle drei Ableitungen an dieser Stelle x angegeben.

T-Tangente

hier können Stellen angegeben werden, an denen die Tangentengleichung und die Normalengleichung berechnet werden sollen.

G-Gesamtausgabe Drucker

beim Drücken von <G> wird ein Gesamtausdruck auf den Drucker geleitet. Ist der Drucker nicht eingeschaltet, so erscheint eine Aufforderung zum Einschalten.

Gebrochenrationale Funktionen

Es werden folgende Operationen durchgeführt:

1.) Ausmultiplikation von Produkten in Zähler und Nenner, Umwandeln von Bruchtermen in Dezimalzahlen.

2.) Berechnung der Asymptote. Falls eine lineare Asymptote existiert, wird diese angegeben. Zusätzlich wird der Funktionsterm als Summe einer ganzrationalen und einer echt gebrochenrationalen Funktion angegeben.

Falls der Nenner vollständig im Zähler enthalten ist, springt das Programm in den Teil -1- (ganzrational). Das bedeutet: es wird die nach Kürzen entstandene ganzrationale Funktion diskutiert! (siehe Beispiel auf Seite 50/51). Ist eine Lücke im Definitionsbereich behoben worden, wird diese mit der stetigen Ergänzung im Ausgabemenue angegeben.

3.) Berechnung der Nullstellen und der Definitionslücken.

Nach Ausgabe der gefundenen Werte wird das Programm eventuell im Zähler und Nenner gleiche Nullstellen erkennen und den Funktionsterm kürzen.

4.) Bilden der ersten Ableitung. Falls möglich, wird der Funktionsterm der ersten Ableitung gekürzt.

Funktion und Ableitungen:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

Definitionslücken:

$D_f(\emptyset)$

Gerader positiver Pol bei $x = 0$

Asymptote:

X-Achse ist Asymptote

Nullstellen:

Keine

Extremstellen:

Keine

Wendepunkte:

Keine

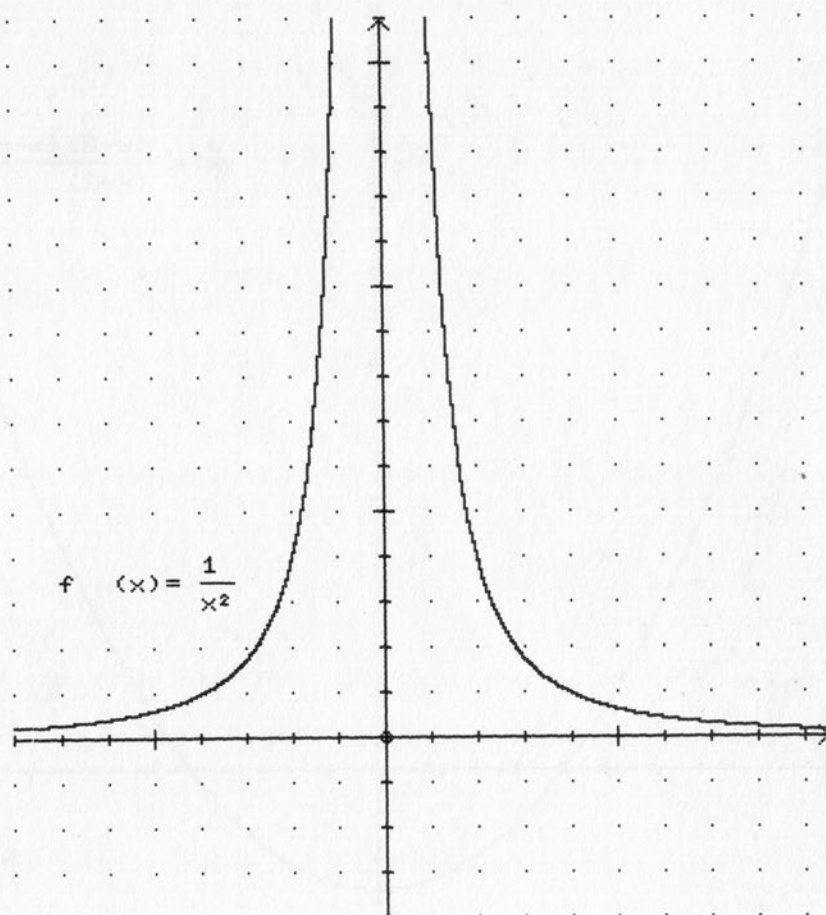
Tangente:

Tangente an $P(1/1)$:

$$t(x) = -2x + 3$$

Normale:

$$n(x) = .5x + .5$$



$$x-E = .5$$

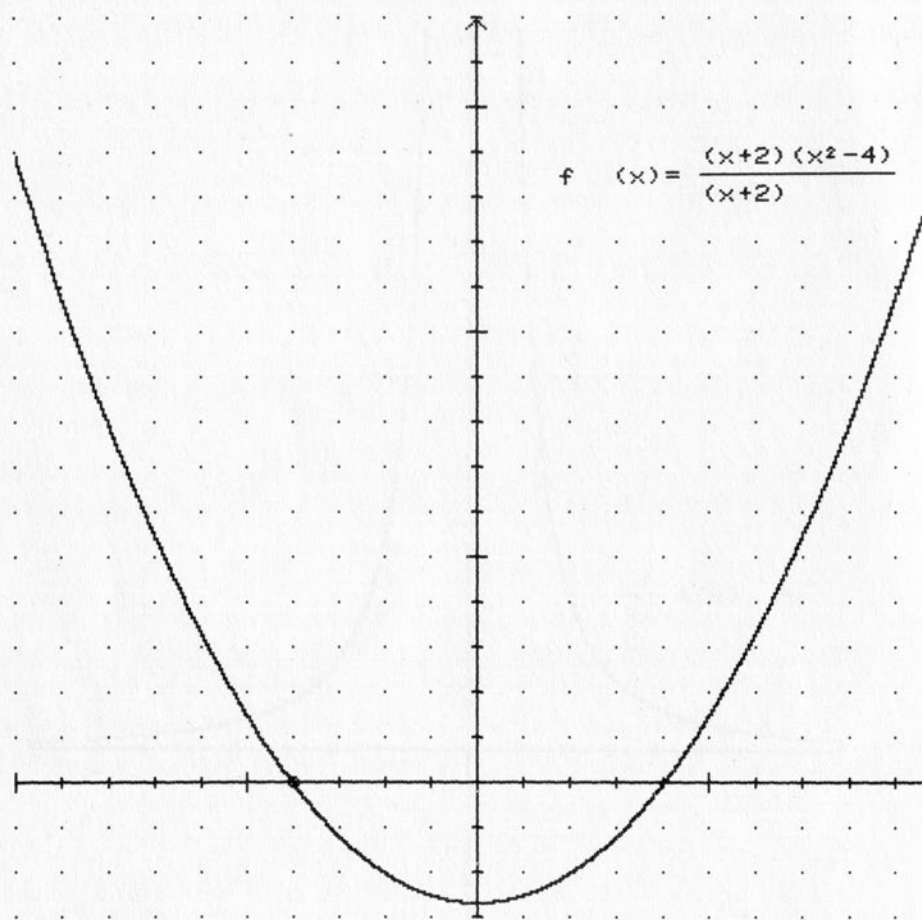
$$x_1 = -4$$

$$x_2 = 4.5$$

$$y-E = .25$$

$$y_1 = -1$$

$$y_2 = 4$$



$$x-E = .5$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 5$$

$$y-E = 1.5$$

$$y_1 = -4.5$$

$$y_2 = 25.5$$

Funktion und Ableitungen:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x^2-4)}{(x+2)} \\ = x^2 - 4$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

Definitionslücken:

$D_1(-2)$ Stetige Ergänzung durch $f(-2) = 0$

Nullstellen:

$$N_1(-2/0) \qquad f'(-2) = -4$$

$$N_2(2/0) \qquad f'(2) = 4$$

Extremstellen:

$$E_1(0/-4) \qquad \text{Min} \qquad f''(0) = 2$$

Wendepunkte:

Keine

Werte:

$$f(-3) = 5 \quad f'(-3) = -6 \quad f''(-3) = 2 \quad f'''(-3) = 0$$

Bitte beachten Sie die Hinweise auf Seite 47.

5.) Berechnung der Extremwerte und Ausgabe der Art der Extremwerte. (Maxima - Minima werden in der Ausgabe bezeichnet). Außerdem werden Funktionswerte und Werte der zweiten Ableitung angegeben.

6.) Bilden der zweiten Ableitung. Falls möglich, wird der Funktionsterm gekürzt.

7.) Berechnung der Wendepunkte und Ausgabe der Art der Wendepunkte. (Rechts - links - Wendepunkt bzw. links - rechts - Wendepunkt). Außerdem werden Funktionswerte und Werte der ersten Ableitung angegeben.

Sattelpunkte werden sowohl bei 5.) als auch bei 7.) angegeben, ebenso Stellen, an denen 1. und 2. Ableitung Null sind.

Anschließend springt das Programm ins Ausgabemenue.

ACHTUNG: Bei langen Funktionstermen ist u.U. die Grenze der Leistungsfähigkeit des Computers überschritten. Dies kann zum vorzeitigen Abbruch des Kurvendiskussionsprogramms führen. Das Programm geht dann vorzeitig ins Ausgabemenue.

Ausgabemenue erster Teil

Zusätzlich zu den Punkten des Ausgabemenues für ganzrationale Funktionen erscheinen hier einige weitere Punkte. Insgesamt sind das nun:

1-Druckerausgabe. Beim Drücken der Taste <1> wechselt die Anzeige von NEIN auf JA und vice versa, so daß alle Angaben auch auf dem Drucker ausgegeben werden können.

F-Funktion und Ableitungen

Da oft die Funktionsterme länger sind, wird dabei manchmal die Ausgabe in 2 Teile aufgeteilt.

-N-Nullstellen

D-Definitionslücken-Pole

Hierbei werden die Definitionslücken, die Pole und die Art der Pole angegeben. Hierbei bedeutet z.B. (+ -) , daß links der Polstelle die Funktion gegen Unendlich, rechts gegen minus Unendlich strebt.

E-Extremwerte

W-Wendepunkte

S-Sonstiges

Nach Drücken der Taste <S> wird ein Zweiter Menueteil angesprungen, in dem wiederum wie oben der Drucker angesprochen werden kann.

Funktion und Ableitungen:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)}$$
$$= \frac{x^2 - 2x - 8}{x+3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 2}{x^2 + 6x + 9}$$

$$f''(x) = \frac{14}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$$

Definitions-lücken:

$$D_1(-3)$$

Ungerader Pol (- +) bei $x = -3$

Asymptote:

Asymptote: $g(x) = x - 5$

$$f(x) = x - 5 + \frac{7}{(x+3)}$$

Nullstellen:

$$N_1(-2 / 0)$$

$$f'(-2) = -6$$

$$N_2(4 / 0)$$

$$f'(4) = .86$$

Extremstellen:

$$E_1(-5.65 / -13.29)$$

Max

$$f''(-5.65) = -.76$$

$$E_2(-.35 / -2.71)$$

Min

$$f''(-.35) = .76$$

Wendepunkte:

Keine

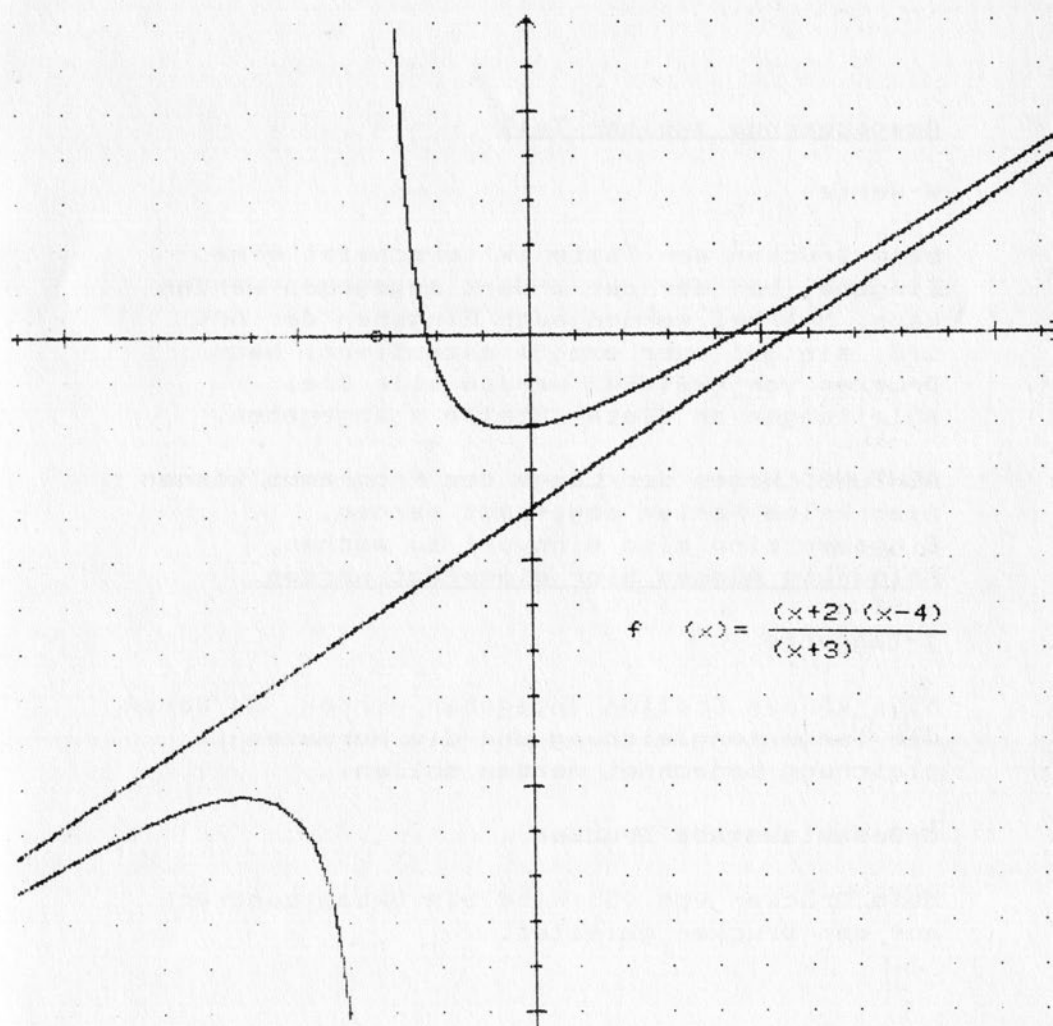
Tangente:

Tangente an $P(-2 / 0)$:

$$t(x) = -6x - 12$$

Normale:

$$n(x) = .17x + .33$$



$$f(x) = \frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)}$$

$$x-E = .9$$

$$x_1 = -9.9$$

$$x_2 = 9.9$$

$$y-E = 1.3$$

$$y_1 = -19.5$$

$$y_2 = 9.1$$

Ausgabemenue zweiter Teil

W-Werte

beim Drücken der Taste <W> erscheint eine Eingabe, bei der der x-Wert angegeben werden kann. Hierbei werden auch Eingaben der Art $1/3$, $\sin(34)$ oder $\exp(5)$ akzeptiert. Nach Drücken von <RETURN> werden alle drei Ableitungen an dieser Stelle x angegeben.

ACHTUNG: Wegen der Länge des Programms können hier keine Fehler abgefragt werden.
Eingaben sind also sinnvoll zu machen,
Malpunkte müssen hier eingefügt werden.

T-Tangente

hier können Stellen angegeben werden, an denen die Tangentengleichung und die Normalengleichung berechnet werden sollen.

G-Gesamtausgabe Drucker

beim Drücken von <G> wird ein Gesamtausdruck auf den Drucker geleitet.

Sonstige Funktionen

Hierbei können theoretisch alle Funktionen eingegeben werden, die das Betriebssystem des Computers versteht. Beachten Sie auch bitte die Eigenarten; z.B. daß die sonst übliche ln-Darstellung des logarithmus naturalis hier log heißen muß. Ebenso sind die Klammern zu beachten. z.B. $\sin^2(x)$ muß $\sin(x)^2$ heißen. Das Programm vereinfacht hier keine Terme (wegen der Komplexität der Möglichkeiten).

Zu beachten sind auch eventuelle Definitionsbeschränkungen. Als Definitionsbereich ist voreingestellt das Intervall von -10 bis 10. Eine Änderung ist am Anfang des Kurvendiskussionsprogramms möglich.

Programmablauf:

- 1.) Ableitung (Bilden der ersten drei Ableitungen). Falls eine Ableitung mehr als 255 Zeichen lang ist, kann Sie nicht mehr berechnet werden.
- 2.) Berechnung der Nullstellen. (Siehe Bem. nächste Seite).
- 3.) Berechnung der Extremwerte und Ausgabe der Art der Extremwerte (Maxima - Minima werden in der Angabe angezeigt).

Funktion und Ableitungen:

Grundmenge [0, 10]

$$f(x) = \sin(x) - \cos(x)$$

$$f'(x) = \cos(x) - (-\sin(x))$$

$$f''(x) = -\sin(x) - (-\cos(x))$$

$$f'''(x) = -\cos(x) - (+\sin(x))$$

Nullstellen:

$$N_1 (.79 / 0)$$

$$f' (.79) = 1.41$$

$$N_2 (3.93 / 0)$$

$$f' (3.93) = -1.41$$

$$N_3 (7.07 / 0)$$

$$f' (7.07) = 1.41$$

Extremstellen:

$$E_1 (2.36 / 1.41)$$

Max

$$f'' (2.36) = -1.41$$

$$E_2 (5.5 / -1.41)$$

Min

$$f'' (5.5) = 1.41$$

$$E_3 (8.64 / 1.41)$$

Max

$$f'' (8.64) = -1.41$$

Wendepunkte:

$$W_1 (.79 / 0)$$

l-r-Wp

$$f' (.79) = 1.41$$

$$W_2 (3.93 / 0)$$

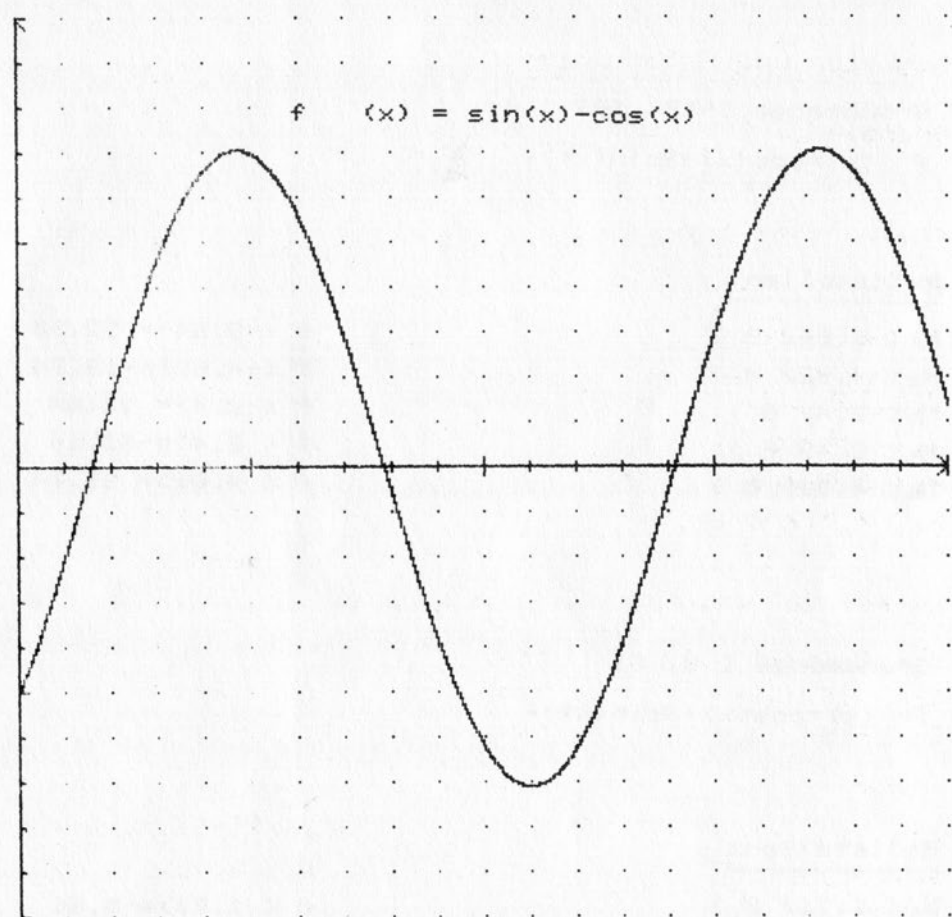
r-l-Wp

$$f' (3.93) = -1.41$$

$$W_3 (7.07 / 0)$$

l-r-Wp

$$f' (7.07) = 1.41$$



$$x-E = .5$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 10$$

$$y-E = .2$$

$$y_1 = -2$$

$$y_2 = 2$$

Grundmenge $[-10, 10]$

$$f(x) = \cos(x) + 3\sin(x^2)^2$$

Nullstellen:

$$N_1(-9.84 / 0)$$

$$f'(-9.84) = 52.93$$

$$N_2(-4.02 / 0)$$

$$f'(-4.02) = -19.74$$

$$N_3(-2.4 / 0)$$

$$f'(-2.4) = 13.14$$

$$N_4(2.4 / 0)$$

$$f'(2.4) = -13.14$$

$$N_5(4.02 / 0)$$

$$f'(4.02) = 19.74$$

Grundmenge $[0, 5]$

$$f(x) = \cos(x) + 3\sin(x^2)^2$$

Nullstellen:

$$N_1(1.71 / 0)$$

$$f'(1.71) = -5.31$$

$$N_2(1.86 / 0)$$

$$f'(1.86) = 5.67$$

$$N_3(2.4 / 0)$$

$$f'(2.4) = -13.14$$

$$N_4(2.62 / 0)$$

$$f'(2.62) = 13.93$$

$$N_5(3.17 / 0)$$

$$f'(3.17) = 18.07$$

$$N_6(3.9 / 0)$$

$$f'(3.9) = -18.95$$

$$N_7(4.02 / 0)$$

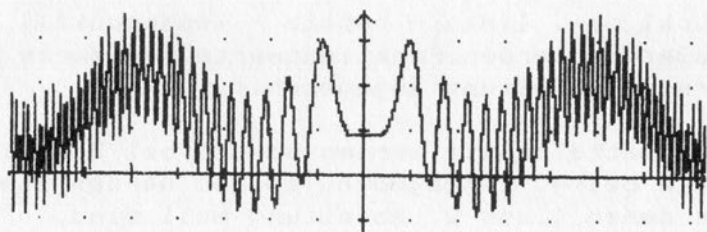
$$f'(4.02) = 19.74$$

$$N_8(4.38 / 0)$$

$$f'(4.38) = 17.26$$

Funktion:

$$f(x) = \cos(x) + 3\sin(x^2)^2$$



$$x-E = 1.3$$

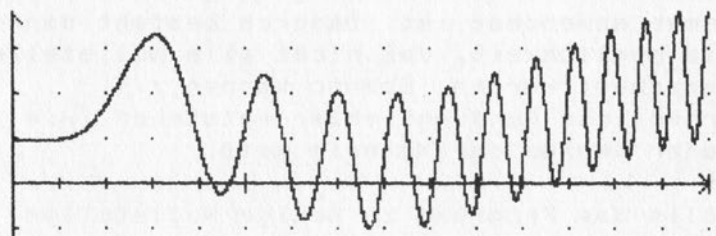
$$y-E = 1.1$$

$$x_1 = -9.1$$

$$y_1 = -1.1$$

$$x_2 = 9.1$$

$$y_2 = 3.3$$



$$x-E = .4$$

$$y-E = 1$$

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = -1$$

$$x_2 = 6$$

$$y_2 = 3$$

Außerdem werden Funktionswerte und Werte der zweiten Ableitung angegeben.

4.) Berechnung der Wendepunkte und Ausgabe der Art der Wendepunkte. (Rechts - links - Wendepunkt bzw. links - rechts - Wendepunkt). Außerdem werden Funktionswerte und Werte der ersten Ableitung angegeben.

5.) Sattelpunkte werden sowohl bei 3.) als auch bei 4.) angegeben, ebenso werden Stellen, an denen 1. und 2. Ableitung Null sind, entsprechend angegeben. Anschließend springt das Programm ins Ausgabemenue.

Wenn einer der oben aufgeführten Punkte nicht berechnet werden kann, geht das Programm vorzeitig ins Ausgabemenue.

ACHTUNG! Damit das Programm seine Vielfältigkeit und generelle Anwendbarkeit behält, ist die Nullstellenberechnung so gehalten, daß sie immer anwendbar ist. Dadurch besteht dann aber die Möglichkeit, daß nicht alle Nullstellen berechnet werden. Ebenso können z.T. erhebliche Rundungsfehler entstehen, wie ja jeder Kenner der Materie weiß.

Falls das Programm zu wenige Nullstellen findet, ist es empfehlenswert, die Grundmenge zu verkleinern. Dadurch wird die Genauigkeit der Nullstellenuntersuchung verbessert, so daß eventuell vorhandene weitere Nullstellen gefunden werden können (siehe ausführliches Beispiel).

Ausgabemenue

1-Druckerausgabe. Beim Drücken der Taste <1> wechselt die Anzeige von NEIN auf JA und vice versa, so daß alle Angaben auch auf dem Drucker ausgegeben werden können.

F-Funktion und Ableitungen

N-Nullstellen

E-Extremwerte

W-Wendepunkte

Die obigen 4 Punkte sprechen für sich.

B-Werte

beim Drücken der Taste erscheint eine Eingabe, bei der der x-Wert angegeben werden kann. (Siehe hier auch die Bemerkungen bei GEBROCHENRATIONALE FUNKTION).

T-Tangente

hier können Stellen angegeben werden, an denen die Tangente und die Normale berechnet werden sollen.

G-Gesamtausgabe Drucker

beim Drücken von <G> wird ein Gesamtausdruck auf den Drucker geleitet.

M-Grundmenge ändern

hiermit kann die Grundmenge, in der die Diskussion der sonstigen Funktion erfolgt, geändert werden. Gleichzeitig werden Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte neu berechnet.

ZEICHENPROGRAMM

Nach Aufruf des Zeichenprogramms werden Sie gefragt, ob die Grafik gelöscht werden soll. Wird hier mit Nein geantwortet, so wird die Grund- und Wertemengeeingabe übersprungen und nach Beantwortung der Fragen, ob Punkte verbunden und Ableitungen gezeichnet werden sollen, wird der Graph von f und wenn gewünscht dessen Ableitungen in die bestehende Grafik eingezeichnet. Funktionsüberlagerungen sind hiermit sehr einfach darzustellen.

Verständlicherweise erscheint die Frage, ob gelöscht werden soll, nicht beim ersten Aufruf des Zeichenprogramms.

Anschließend werden auf dem Bildschirm die beiden Bereiche angegeben, in denen der Graph der Funktion gezeichnet werden soll. Die obere Menge entspricht dem Bereich auf der x -Achse, die untere dem auf der y -Achse. Es wird automatisch immer der zuletzt gewählte Bereich beibehalten, so daß man unterschiedliche Funktionsgraphen in immer dem gleichen Bereich zeichnen lassen kann, ohne diesen jedesmal wieder neu eingeben zu müssen.

Es wird gefragt, ob die angezeigten Bereiche beibehalten werden sollen. Entscheidet man sich für 'Ja', so wird im Programm weitergegangen und man kommt zu einem neuen Fragenmenue (siehe Punkte verbinden, Raster, Ableitungen)

Normierung:

Soll der Zeichenbereich jedoch geändert werden, so wird anschließend sofort gefragt, ob der Bereich automatisch normiert werden soll. Entscheidet man sich für eine Normierung, so wird die nachher berechnete Schrittweite, d.h. der Abstand zwischen zwei Strichen auf der x- bzw. y-Achse, automatisch normiert.

Während ohne automatische Normierung sehr 'unschöne' Schrittweiten herauskommen können, z.B. '0,48852753', so werden sich mit automatischer Normierung nur "vernünftige" Schrittweiten ergeben. Auf die oben angegebene Schrittweite bezogen, z.B. '0,5'.

Grund- und Wertemengeeingabe:

Nachdem beantwortet wurde, ob automatisch normiert werden soll, kommt man zur Eingabe der Grundmenge. Eingegeben werden nacheinander 'X1' und 'X2'. Sie stellen die x-Grenzen dar, zwischen denen der Graph von f gezeichnet werden soll.

Anschließend wird die Wertemenge eingegeben. Hierzu erscheint ein Menue. Bei Drücken von <RETURN> wird die Wertemenge gleich der Wertemenge gesetzt, die vorher angezeigt wurde. Wenn der y-Bereich gleich dem x-Bereich sein soll, so drückt man einfach <A>.

Sollen die Werte jedoch wie bei der Grundmengeeingabe eingegeben werden, so drückt man .

Mit <C> oder <D> wird die Schrittweite in y-Richtung gleich der in x-Richtung. Das geschieht so, daß man entweder 'Y1' (bei 'C') oder 'Y2' (bei 'D') eingibt. Der jeweils zugehörige Wert wird dann automatisch berechnet. Mit dieser Option können Graphen im Seitenverhältnis 1:1 gezeichnet werden. Die Graphen sind dann also nicht in einer Richtung gestaucht.

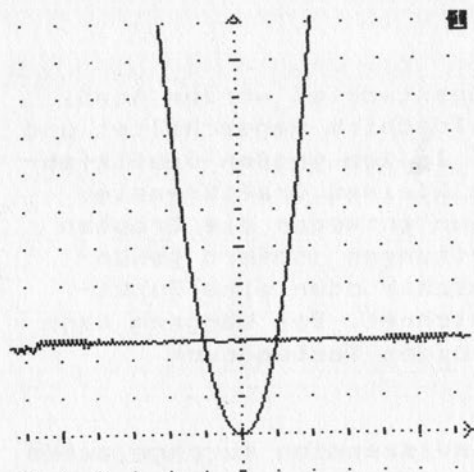
Nachdem die Wertemenge eingegeben wurde, wird auch diese auf dem Bildschirm angezeigt.

Punkte verbinden, Raster, Ableitungen:

Es wird als nächstes gefragt, ob die Punktverbindungsroutine während des Zeichnens eingeschaltet, ob ein Raster unterlegt und die Ableitungen gezeichnet werden sollen.

ACHTUNG: Auch wenn die Ableitungen noch nicht innerhalb der Kurvendiskussion berechnet worden sind, können ihre Schaubilder trotzdem gezeichnet werden. Dies geschieht über ein Näherungsverfahren und kann deshalb besonders bei der dritten Ableitung sehr lange dauern. Außerdem können bei Ableitungen der Form $f'(x)=\text{const.}$ sehr starke Rechenungenauigkeiten auftreten, die schließlich dafür sorgen, daß keine eindeutige Parallele zur x-Achse gezeichnet wird. Wenn man also genaue Ableitungen wünscht, so müssen diese vorher in der Kurvendiskussion berechnet werden!

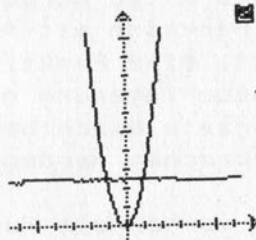
Wenn als Funktion eine Funktionsschar oder eine Funktionsüberlagerung eingegeben wurde, so können keine Schaubilder von Ableitungen mehr gezeichnet werden. Die Abfrage, ob diese gezeichnet werden sollen, erscheint dann auch nicht mehr.



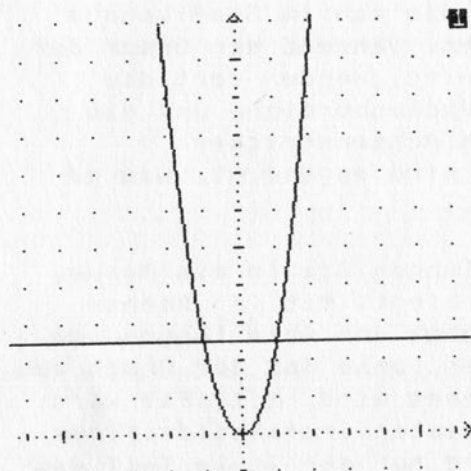
Koordinaten:

$x-E = 1.4$
 $y-E = 0.8$
 $x_1 = -8.4$
 $x_2 = 8.4$
 $y_1 = -0.8$
 $y_2 = 0.8$

OPTI-MA V1.2



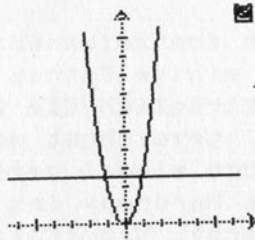
$f(x)=x^2$ mit 2.Ableitung (näherungsweise)



Koordinaten:

$x-E = 1.4$
 $y-E = 0.8$
 $x_1 = -8.4$
 $x_2 = 8.4$
 $y_1 = -0.8$
 $y_2 = 0.8$

OPTI-MA V1.2



$f(x)=x^2$ mit 2.Ableitung (berechnet)

Zeichnen:

Nachdem alle Fragen beantwortet worden sind, wird auf den Grafikbildschirm umgeschaltet und die Grafik aufgebaut. In dem großen Grafikfenster links und in dem kleinem Grafikfenster rechts unten werden nun entweder die Graphen der Funktion mit Ableitungen (sofern gewünscht), eine Funktionsschar oder eine Funktionsüberlagerung gezeichnet. Der Vorgang kann jederzeit durch beliebigen Tastendruck abgebrochen werden.

Wenn vorher die Kurvendiskussion durchgelaufen ist und evtl. Definitionslücken und Asymptoten berechnet wurden, so werden diese automatisch eingezeichnet. Definitionslücken werden jedoch aus Berechnungsgründen nur dann eingezeichnet, wenn beide Koordinatenachsen sichtbar sind.

Im Textfenster oben rechts werden Zeichenbereiche und so lange, wie man im Grafikmodus ist, Menues ausgegeben. Während der Graph der Funktion gezeichnet wird, werden dort die vorher gewünschten Zeichenbereiche und die Abstände zwischen den Achsenstrichen ausgegeben. Außerdem wird angezeigt, was gerade gezeichnet wird.

Nach dem Zeichnen gelangen Sie in ein Menue, das einige Extras verbirgt: Mit <A> können nachträglich die Graphen der Ableitungen von $f(x)$ gezeichnet werden, ohne daß der Graph von f noch einmal gezeichnet wird. Mit <F1> wird eine Hardcopy des gesamten Grafikbildschirms gemacht. Mit <F3> wird nur der linke Teil des Grafikbildschirms gedruckt. Durch Drücken von <F5> wird der gezeigte Bereich ausgeplottet und zwar in der Punktauflösung, die beim

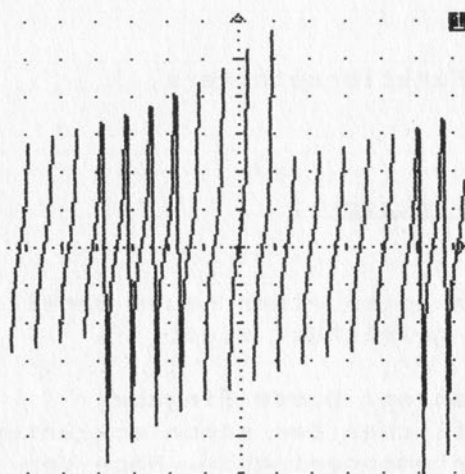
letzten Aufruf des Funktionsplotters eingestellt wurde.

Neuer Bereich (Zoomfunktion):

Es gibt zwei Möglichkeiten einen neuen Bereich festzulegen, in dem gezeichnet wird:

1.) Eingabe durch Zahlen. Diese Eingabe entspricht im wesentlichen der schon erklärten Definitions- und Wertemengeeingabe. Nach der Eingabe wird jedoch sofort wieder auf den Grafikbildschirm umgeschaltet und gezeichnet.

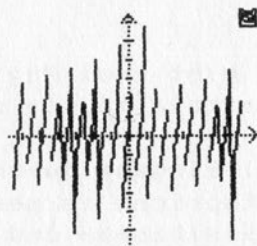
2.) Eingabe durch Markierungen. Bei dieser Eingabe erscheinen auf dem Bildschirm auf Grafikfenster '1' (gekennzeichnet durch eine inverse Eins) zwei Bereichsklammern, von denen die Obere blinkt. Die Cursorsteuertasten bewegen diese Klammer nun über den Bildschirm. Sie bildet mit der unteren Klammer ein Viereck, das dem Bereich entspricht, der anschließend herausgezoomt werden kann. <SPACE> wechselt auf die jeweils andere Klammer, die nun blinkt und durch die Cursortasten bewegt werden kann. Außerdem wird automatisch bei jedem Wechsel der aktuelle Bereich im Textfenster angezeigt. Somit können besonders interessante Bereiche markiert und anschließend gezeichnet werden. Durch Drücken von <RETURN> wird der derzeit markierte Bereich herausvergrößert.



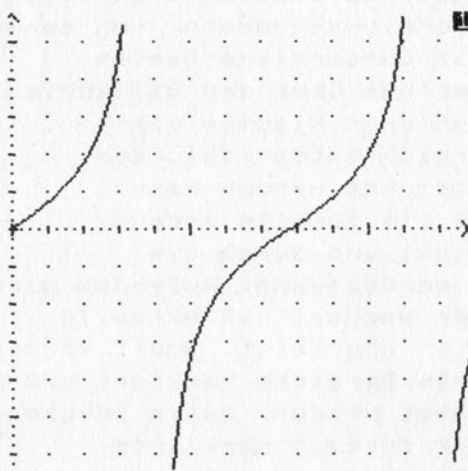
Koordinaten:

$x-E = 4.6$
 $y-E = 2.86$
 $x_1 = -2.706$
 $x_2 = 2.706$
 $y_1 = -4.000$
 $y_2 = 4.000$

OPTI-MA V1.2



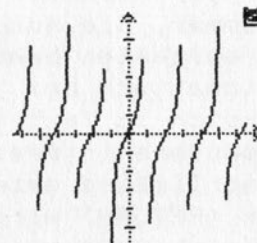
$f(x)=\tan(x)$ mit zu grob gewähltem Bereich



Koordinaten:

$x-E = .4$
 $y-E = .6$
 $x_1 = 0$
 $x_2 = -4.000$
 $y_1 = -0.000$
 $y_2 = 0.000$

OPTI-MA V1.2



$f(x)=\tan(x)$ mit sinnvoller Vergrößerung

Bei beiden Eingabemethoden besteht die Möglichkeit entweder nur Grafikfenster '1' oder '1' und '2' neu zeichnen zu lassen. Nur Grafikfenster '1' Neuzeichnen sollte dann gewählt werden, wenn insgesamt ein Verlauf des Graphen der Funktion gezeichnet wurde, der alle wesentlichen Merkmale darstellt. Somit kann auf Grafikfenster '1' ein besonders interessanter Bereich gezeichnet werden. Wurde jedoch der Anfangsbereich zu grob gewählt, so können beide Grafikfenster neu gezeichnet werden.

An dieser Stelle sei erwähnt, daß natürlich alles eine bestimmte Grenze hat. So könnte im Prinzip beliebig weit herausvergrößert werden. Beachtet werden muß dabei jedoch, daß durch jede Vergrößerung die Achsenschnittweite immer um einen bestimmten Faktor kleiner wird. Dies führt zwangsläufig zu Rundungsfehlern und schließlich dazu, daß ein verfälschtes Bild des Graphen der Funktion entsteht. Ebenso wird es Fälle geben, in denen ein zu groß gewählter Bereich Probleme mit sich bringt. Hierbei treten zwar Rundungsfehler in den Hintergrund, jedoch wird die Punktverbindungsroutine Polstellen nicht mehr richtig auflösen können (siehe Beispiel).

1. The first step in the process of developing a new product is to identify a market need. This is often done through market research, which can be conducted in a variety of ways, including surveys, focus groups, and interviews. The goal is to understand what customers want and need, and to identify any gaps in the current market.

2. Once a market need has been identified, the next step is to develop a concept for a new product. This involves brainstorming ideas and creating a rough sketch of the product. It is important to consider the feasibility of the idea, as well as the potential for profitability.

3. The third step is to create a prototype of the product. This can be done using a variety of materials and techniques, depending on the nature of the product. The prototype is used to test the product's functionality and to gather feedback from potential customers.

4. After the prototype has been tested, the next step is to develop a business plan. This document outlines the company's goals, strategies, and financial projections. It is a key tool for securing funding and for guiding the company's operations.

5. The final step in the process is to launch the product into the market. This involves creating a marketing plan, setting up distribution channels, and promoting the product to potential customers. It is important to monitor the product's performance in the market and to make adjustments as needed.

FUNKTIONSPLOTTER

Wie der Name schon sagt, kann dieses Programmteil den Graphen einer Funktionen ausplotten. Hierfür wird jedoch kein Plotter benötigt, sondern nur ein einfacher Matrixdrucker. Durch eine ausgeklügelte Druckeroutine kann genau wie im Zeichenprogramm jede Funktion mit ihren Ableitungen (falls gewünscht), Funktionsüberlagerung oder Funktionsschar gezeichnet werden. Im Gegensatz zum Zeichenprogramm gibt es jedoch zwei Unterschiede:

- 1.) Die Ausgabe erfolgt nicht auf dem Bildschirm, sondern es wird, wie schon erwähnt, auf den Drucker ausgegeben. Dadurch entfällt natürlich auch die 'Zoomfunktion'.
- 2.) Die Grafikauflösung ist variabel.

Nach Einarbeitung in das Programm, wird man schnell feststellen, daß es oft sehr zweckmäßig ist, zuerst im Zeichenprogramm einen bestimmten Bereich festzulegen und diesen dann durch Übernahme von Grund- und Wertemenge auszuplotter.

Anzahl Punkte in x- und y-Richtung:

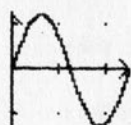
Wie schon gesagt, ist die Auflösung beim Plotten der Grafik variabel. Die Größe der Ausdrucke kann so selber festgelegt werden. Die Größe des Ausdrucks ist allein davon abhängig, welches Papierformat der Drucker noch verarbeitet. Mit DIN A3-Druckern kann somit die volle Papierbreite ausgenutzt werden.

Wird der Funktionsplotter das erste Mal benutzt, fällt auf, daß die ausgedruckte Grafik um 90 Grad gekippt ist. Dies ist allein durch die geringe Speicherkapazität des C64 zu begründen. Um die Grafik 'richtigherum' auszudrucken, ist es aus mathematischen Gründen (Definition des Begriffs 'Funktion') notwendig die gesamte Grafik auf einmal aufzubauen. Dies mag bei kleinen Grafiken, z.B. 100*100 Punkte, noch möglich sein (Speicherbedarf ca. 1KByte). Bei größeren Grafiken, z.B. 640*1000 Punkte, wäre jedoch schon ein Speicher von etwa 78 KByte nötig. Es ist leicht ersichtlich, daß dies mit dem Commodore 64 nicht zu verwirklichen ist.

Nach Laden des Programms, wird zunächst einmal nach der Anzahl der Punkte in x- und y-Richtung gefragt. Achtung: x und y beziehen sich nicht auf den Druckkopf, sondern auf das zu plottende Koordinatensystem.

Funktion:

$$f(x) = \sin(x)$$



$$x-E = 2.5$$

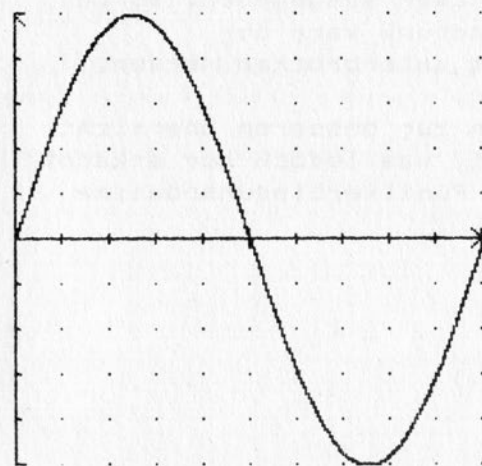
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 5$$

$$y-E = .8$$

$$y_1 = -.8$$

$$y_2 = .8$$



$$x-E = .625$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 6.25$$

$$y-E = .2$$

$$y_1 = -1$$

$$y_2 = 1$$

Das Programm schlägt bei dessen erstem Aufruf für beide Richtungen 200 Punkte vor. Die Auflösung in x-Richtung ist auf max. 9999 Punkte beschränkt, die in y-Richtung ist abhängig von der Anzahl der Punkte, die der angeschlossene Drucker pro Zeile drucken kann.

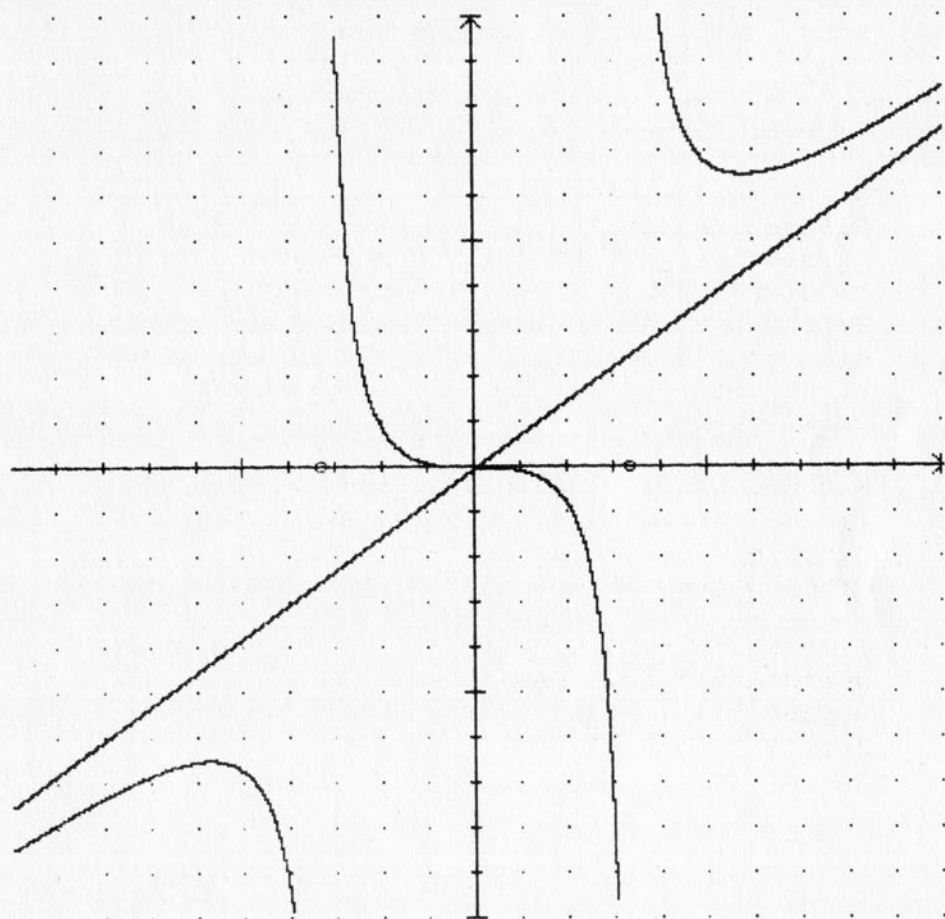
Nach Eingabe der Grafikauflösung wird auf dem Bildschirm der Bereich angezeigt, in dem 'geplottet' werden soll, und es wird gefragt, ob dieser Bereich beibehalten werden soll. Da Zeichenprogramm und Funktionsplotter ab hier bis zur Ausgabe der Grafik gleich aufgebaut sind, sei hier auf das Zeichenprogramm verwiesen.

Nachdem alle Fragen beantwortet wurden, wird die Grafik auf dem Drucker ausgegeben. Durch einen einfachen Tastendruck kann der Druckvorgang jederzeit unterbrochen werden.

Die Ableitungen werden zur besseren Übersicht gestrichelt gezeichnet, was jedoch nur erkannt werden kann, wenn die Punktverbindungsroutine angesprochen wird.

Funktion:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$



$$x-E = .6$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = 6$$

$$y-E = .8$$

$$y_1 = -8$$

$$y_2 = 8$$

INTEGRALRECHNUNG

In diesem Programmteil besteht die Möglichkeit bestimmte Integrale der eingegebenen Funktion zu berechnen. Wenn eine ganzrationale Funktion eingegeben wurde und diese auch in der Kurvendiskussion diskutiert wurde, so wird von dieser Funktion auch die Stammfunktion bestimmt. Die Berechnung des bestimmten Integrals geschieht hierbei natürlich dann über die Stammfunktion. Bei allen anderen Funktionen wird das bestimmte Integral über ein Näherungsverfahren berechnet, was natürlich etwas länger dauert. Das Verfahren ist so ausgelegt, daß bei Integration über einen stetigen Bereich das Ergebnis mit etwa drei bis vier Stellen Genauigkeit herauskommt.

Nach Laden des Programms wird als erstes die Funktion ausgegeben und, wenn möglich, die Stammfunktion berechnet und ebenfalls ausgegeben. Anschließend kommt man in ein Ausgabemenue.

Funktion:

$$f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 5x$$

Stammfunktion:

$$F(x) = 0.75x^4 - x^3 + 2.5x^2 + C$$

Integral von $f(x)$:

$$a = 0$$

$$b = 5$$

$$b$$

$$\int_a^b f(x) dx = 406.25$$

$$a$$

Integral von $f(x)$:

$$a = -5$$

$$b = 5$$

$$b$$

$$\int_a^b f(x) dx = -250$$

$$a$$

Ausgabemenue im Integralprogramm:

Mit <I> kann wie im Kurvendiskussionsprogramm zwischen Druckerausgabe 'Ja' und 'Nein' hin und hergeschaltet werden.

Mit <F> wird die Funktion auf dem Bildschirm und, wenn gewünscht, auch auf dem Drucker ausgegeben.

Mit <S> wird die Stammfunktion ausgegeben. Dieser Menuepunkt erscheint nur, wenn die Stammfunktion vorher auch bestimmt worden ist.

Durch Drücken von <I> kommt man schließlich zur eigentlichen Integralrechnung. Nach Eingabe der Werte 'a' und 'b' wird schließlich das bestimmte Integral berechnet und, wenn gewünscht, auch ausgedruckt.

Nach Drücken von <RETURN> wird das Abschlußmenue aufgerufen.

- Plotprogramm (P)

Das Plotprogramm dient dazu, die eingegebenen Funktionsgraphen in variabler Auflösung auf dem Drucker "auszuploten".

- Integralprogramm (I)

Im Integralprogramm können bestimmte Integrale berechnet werden. Bei ganzrationalen Funktionen ist die Bestimmung der Stammfunktion möglich.

OPTI-MA ist damit in der Lage, eine Kurvendiskussion so durchzuführen, wie sie in Schule und Studium benötigt wird.

Gerade in der numerischen Mathematik ist es oft nur schwer möglich, exakte Lösungen anzugeben, weil die Rechengenauigkeit eines Computers Grenzen setzt.

OPTI-MA versucht, auch diese Probleme zu lösen.

Guido Bartsch
Jens Kruppe
Edgar Kürpig

HINWEIS FÜR LEHRER

OPTI-MA ist als mathematisches Werkzeug im Mathematik-Unterricht und zu Selbstlernzwecken einsetzbar.

Dadurch, daß eine komplette Kurvendiskussion durchgeführt wird, ist OPTI-MA in der Lage, Schüler und Lehrer wirksam bei der Arbeit zu unterstützen.

Funktion und deren Ableitungen werden übersichtlich untereinander angeordnet, so daß der Schüler die Ableitungsformel einer ganz-rationalen Funktion sehr schnell erkennt.

Der Begriff der Nullstelle, des Maximums, des Minimums, der Wendestelle etc. kann anhand des Funktionsgraphen anschaulich erläutert werden. Auch Analogien und Unterschiede zwischen verschiedenen Funktionstypen lassen sich mit OPTI-MA bequem darstellen.

STICHWORTVERZEICHNIS

Abgeleitete mathematische Funktionen ..	9
Allgemeine Hinweise	8
Bildschirmparameter	37
Diskettenverwaltung	37
Druckeranpassung	12, 15
Druckerinterface	13
Druckertyp	13
Funktionseingabe	21
Funktionsgraph zeichnen	70
Funktionsplotter	75
Funktionsschar	30
Funktionstasten	34, 71
Funktionstyp	21
Funktionstyp ganzrational	21, 42
Funktionstyp gebrochenrational	22, 47
Funktionstyp sonstig	23, 57
Funktionswertberechnung	46, 56, 63
Funktionsgraphüberlagerung	33
Grafik drucken	36
Grafikverwaltung	34
Hardcopy	36
Hauptmenue	19
Hinweise für Lehrer	85
Inhaltsverzeichnis	6
Integralrechnung	81

Kennnummer	12
Kurvendiskussion	39
Linefeed	12
Neuer Bereich	71
Normierung	66
Plotter	75
Programm laden	11
Programmstart	11
Punkte verbinden	68
Raster	68
Scharparameter	30
Sekundäradresse	12
Sondertasten	8, 34, 41
Unterrichtseinsatz	85
Wichtige Hinweise	8
Zeichenprogramm	65
Zeichensatz	37
Zoom-Funktion	71

Das flexible Kurvendiskussions-Programm OPTI-MA unterstützt Differential- und Integralrechnung der Oberstufe an Gymnasium und Fachoberschule.

Ob Nullstellen oder Wendepunkte - OPTI-MA verarbeitet rationale und trigonometrische, Exponential- und Logarithmus-Funktionen. Auch Parameter und Funktionsscharen werden akzeptiert. Von Ableitungen über Tangenten- und Normalengleichung bis hin zur Bestimmung von Polen, Lücken und Asymptoten reichen die Möglichkeiten des Programms.

Die HiRes-Grafik zeichnet sich aus durch eine komfortable Zoom-Funktion. Die Druckeranpassung ist äußerst einfach. Jedes Druckformat wird unterstützt.

C
F Ostermann Verlag
Paul-Hösch-Str. 4
Tel: 089-8201200
D-8000 München 60



ISBN 3-926094-29-X